

Perturbação no Tráfego Rodoviário

Adilson de Jesus Martins da Silva

UniCV - DCT, Praia - Cabo Verde

2 de Outubro de 2012

Resumo

Dado um conjunto de veículos (automóveis), que se encontram a circular numa via de tráfego rodoviário, em formato de fila única, à (aproximadamente) mesma velocidade e cujo as distâncias entre dois veículos consecutivos quaisquer mantêm-se iguais, neste trabalho abordamos o problema da modelação matemática das “perturbações nos seus deslocamentos”, quando o condutor do veículo que se encontra à frente, isto é, que lidera o grupo, trava (desacelera) repentinamente por um instante e, de seguida, volta a acelerar até que o veículo atinja novamente a velocidade com que vinha a circular, antes deste ter travado.

De facto, a travagem repentina do veículo que segue à frente vai perturbar a normal fluência dos restantes, na medida em que, após este ter desacelerado, para evitar colisão, o condutor do veículo que circula imediatamente a seguir ao seu veículo, assim como os restantes, cada um a seu tempo, também terão que travar.

Palavras Chave: Situação de equilíbrio, Perturbação no deslocamento, Equação - diferencial - atraso.

Abstract

Given a set of vehicles traveling in a traffic line at (approximately) the same speed, and such that the distance between any two successive ones remains constant, we study a mathematical model aiming to describe “flow perturbation” due to changes on the speed of the first vehicle.

Indeed, the braking performed by the first vehicle will surely disturb the traffic flow. The model should incorporate parameters describing reaction times for the successive drivers. The goal is to be able to evaluate how long a small change in speed implies a perturbation on the traffic flow or how large can reaction times be without causing accidents.

Key words: Equilibrium configuration, Displacement perturbation, Differential-delay-equation.

1 O problema

No exercício da tarefa de condução, de todo o sistema do tráfego rodoviário¹, o ser humano exerce o papel predominante; a este requer-se uma constante atenção ao meio que o envolve, para, na eventualidade de surgirem situações que julgar poderem prejudicar a normal circulação do tráfego ou mesmo conduzir a acidentes, tomar a decisão acertada, actuando no órgão mecânico do veículo que conduz, que julgar melhor para a situação em curso.

Assim, no exercício da tarefa de condução, é natural que, entre muitas outras, ao condutor, surjam questões como:

- À velocidade a que o meu veículo circula, conseguirei acionar o travão antes deste embater no veículo que circula imediatamente à frente, caso o condutor deste último reduzir bruscamente a sua velocidade?
- À velocidade a que o meu veículo circula, devo aumentar a sua distância em relação ao veículo que circula imediatamente à frente, para, no caso do condutor deste último reduzir bruscamente a velocidade, conseguir acionar o travão antes do meu veículo embater neste? Qual a distância mínima devo manter em relação ao veículo em questão?

Neste trabalho o nosso objectivo é usar “ferramentas” matemáticas para deduzir um modelo determinístico para dar resposta a um problema que pode surgir no meio de questões do género das que anunciamos em cima. Mais concretamente, considerando um conjunto de veículos a circular em formato “fila única”, isto é, ocupando uma única via (linha de tráfego rodoviário reservada a uma única fila de trânsito), sob certas condições - concretizadas mais à frente - pretendemos deduzir um modelo determinístico razoavelmente aceite para a *perturbação no deslocamento* de cada um destes, quando, a partir de um certo instante, o condutor do veículo que segue à frente acionar o travão (desacelerar) por um instante.

1.1 Algumas noções e hipóteses

Ao conjunto de veículos circulando em formato “fila única”, conforme foi anunciado atrás, chamaremos de pelotão de veículos.

Consideremos um pelotão constituído por N veículos. Suponhamos que, nesse pelotão, todos os veículos circulem à mesma velocidade e que as distâncias entre os pára-choques traseiros e os pára-choques frontais são iguais e permanecem constantes para dois veículos consecutivos quaisquer. Nesta situação diremos que o pelotão de veículos se encontra a circular numa *configuração de equilíbrio*.

Além da *configuração de equilíbrio*, vamos ainda assumir que os veículos têm todos o mesmo comprimento. Obviamente, o leitor poderá eventualmente

¹O sistema de tráfego rodoviário é constituído pela via, pelo meio ambiente, pelo veículo e pelo Ser humano.

afirmar que esta hipótese diverge do que se observa no “dia-a-dia”, mas, relativamente ao comprimento (extensão) da estrada, que é usualmente grande, é natural assumir tal hipótese. De facto, a visão macroscópica da via (visão de um observador a uma determinada distância acima da terra, por exemplo), na sua extensão, permite-nos ignorar a variação nos comprimentos dos veículos, visto serem relativamente ligeiras.

Imaginemos agora um pelotão constituído por N veículos a circular numa *configuração de equilíbrio*. Sejam L o comprimento dos veículos, d a distância entre o pára-choques traseiro e o pára-choques frontal de dois veículos consecutivos quaisquer e $X_i(t)$ a posição do pára-choques frontal do i -ésimo veículo, no instante t , conforme se ilustra na Figura 1.

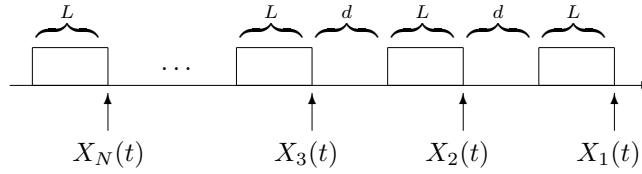


Figura 1: Um pelotão de veículos a circular numa *configuração de equilíbrio*. L e d denotam o comprimento de cada veículo e a distância entre dois veículos consecutivos quaisquer, respectivamente.

Pelo facto de haver uma única via de tráfego, a ultrapassagem não é permitida para nenhum veículo do pelotão, pelo que o modelo que vamos deduzir terá que incluir a preservação da ordem destes: $X_N < X_{N-1} < \dots < X_2 < X_1$.

Sejam $F_i = F_i(t)$ e m_i , respectivamente, a *força de travagem* e a *massa* do i -ésimo veículo. De acordo com a segunda lei de Newton (consultar Scheck [3] para mais detalhes),

$$F_i(t) = m_i X_i''(t + \tau), \quad (1.1)$$

onde τ denota o tempo de reacção dos condutores e $X_i''(t + \tau)$ a derivada da velocidade no instante (atrasado) $t + \tau$, isto é, $\frac{d}{dt} X_i'(t + \tau) = X_i''(t + \tau)$.

Nota .1 *Atendendo a que mediremos as distâncias e o tempo em metros (m) e segundo (s), respectivamente, parece-nos adequado medir a velocidade em metros por segundo (m/s).*

Se assumirmos que a velocidade do i -ésimo veículo, que denominamos de v_i , satisfaz $v_{i-1} \leq v_i$, para $i \geq 2$, um modelo para a sua *força de travagem* (descrita no parágrafo anterior) pode ser deduzido à custa da sua própria magnitude e esta, por sua vez, depende:

- **Da sua velocidade em relação à velocidade do $(i-1)$ -ésimo veículo:** Se $v_i - v_{i-1} \gg 0$, isto é, se a diferença das velocidades for relativamente grande, então a *força de travagem* necessária será também relativamente grande. Por outro lado, se $v_i - v_{i-1} \approx 0$, então a *força de travagem* requerida será relativamente pequena, pelo que é aceitável assumir que a *força de travagem* é directamente proporcional a $v_i - v_{i-1}$.
- **Da sua distância em relação ao $(i-1)$ -ésimo veículo:** Suponhamos que ambos circulam relativamente à mesma velocidade. Se $|X_i - X_{i-1}| \approx 0$, isto é, a distância relativa entre os dois veículos é relativamente pequena, então a *força de travagem* necessária deverá ser relativamente grande; mas se $|X_i - X_{i-1}| \gg 0$, a *força de travagem* necessária deverá ser relativamente pequena. Portanto, é também aceitável que a *força de travagem* seja inversamente proporcional a $|X_i - X_{i-1}|$.

Estas hipóteses conjuntamente com a equação (1.1) implicam:

$$m_i X_i''(t + \tau) = F_i(t) = \beta \frac{v_i(t) - v_{i-1}(t)}{|X_i(t) - X_{i-1}(t)|} \quad (1.2)$$

ou, supondo que os veículos têm todos a mesma *massa* m ($m_i = m$, $i = 1, \dots, N$), de modo equivalente,

$$X_i''(t + \tau) = \lambda \frac{d}{dt} \ln(|X_i(t) - X_{i-1}(t)|) = v_i'(t + \tau), \quad (1.3)$$

onde $\lambda = \frac{\beta}{m}$ e $\beta > 0$ a constante de proporcionalidade. Integrando a equação (1.3) em t , obtêm-se

$$v_i(t + \tau) = X_i'(t + \tau) = \lambda \ln(|X_i(t) - X_{i-1}(t)|) + \alpha_i \quad (1.4)$$

para $i = 2, \dots, N$, visto que a *força de travagem* do veículo líder não é afectada por nenhum dos outros. Aqui, α_i é uma constante que depende somente do veículo i .

Passemos agora à caracterização da *densidade* (do tráfego), ρ , e do *fluxo* (do tráfego), j , na *configuração de equilíbrio*. Começemos com as noções gerais destas variáveis.

Definição .1 *Densidade e fluxo definem-se da seguinte forma:*

- $\rho(t_o, x(t_o)) \equiv$ Número de veículos dentro de um intervalo centrado em $x(t_o)$ no instante t_o pela amplitude do intervalo, ou seja,

$$\rho(t_o, x(t_o)) = \frac{\# \text{ veículos em } [x(t_o) - \eta, x(t_o) + \eta]}{2\eta}.$$

A configuração de equilíbrio permite-nos ignorar a dependência da densidade em η , pelo que, em vez de $\rho(t_o, x(t_o), \eta)$, escrevemos $\rho(t_o, x(t_o))$. Obviamente, assume-se que a densidade é nula se $\eta = 0$;

- $j(t_o, x(t_o)) \equiv$ Número de veículos que passam no ponto x no instante t_o por unidade de tempo, ou seja,

$$j(t_o, x(t_o)) = \frac{\# \text{ veículos que passam em } x(t_o)}{\text{unidade tempo}}$$

Nota .2 Enquanto que $X_i(t)$ denota a posição do para-choques frontal do i -ésimo veículo na via, pelo que depende de i , $x = x(t)$ denota (qualquer) posição na estrada independentemente do veículo.

À medida que o pelotão percorre a via, a persistência da *configuração de equilíbrio* elimina a dependência de *densidade* e *fluxo* das variáveis x e t , uma vez que nesta situação os veículos circulam todos à mesma velocidade e o espaço entre dois quaisquer consecutivos é constante (igual a d). Assim, na *configuração de equilíbrio*

$$\rho = \frac{1}{|X_i(t) - X_{i-1}(t)|} = \frac{1}{d + L} \quad (1.5)$$

e

$$j = j(\rho) = \left(\frac{\# \text{ veículos}}{\text{ampl. de inter.}} \right) \left(\frac{\text{ampl. de inter.}}{\text{unidade tempo}} \right) = \rho v(\rho), \quad (1.6)$$

com d e L definidos anteriormente. Pela equação (1.5), a equação (1.4) reescreve-se como:

$$v = \lambda \ln \left(\frac{1}{\rho} \right) + \alpha = v(\rho) \quad (1.7)$$

e, notando que pela hipótese em baixo, em $\rho = \rho_{max} = \frac{1}{L}$, têm-se $v(\rho) = 0$, substituímos ρ por ρ_{max} na equação (1.7) para determinar a constante α :

$$\alpha = -\lambda \ln \left(\frac{1}{\rho_{max}} \right) = \lambda \ln(\rho_{max}). \quad (1.8)$$

Neste trabalho, assumimos também que na *configuração de equilíbrio*, quando $d \rightarrow 0$, a velocidade do pelotão converge para 0, isto é, à medida que a distância, d , entre os veículos diminui (aumentando conseqüentemente a *densidade*, $\rho = \frac{1}{d+L}$), a velocidade do pelotão também diminui, anulando-se quando $d = 0$. Deste modo, quando $d = 0$ ou, de forma equivalente, $\rho = \frac{1}{L}$, o pelotão encontra-se imobilizado.

Observação .1

- (i) À *densidade máxima* denotamos por ρ_{max} .
- (ii) Uma vez que na *configuração de equilíbrio* a velocidade é constante, α_i não depende de i , pelo que escrevemos α em vez de α_i .

(iii) A violação da restrição $|X_i(t_o) - X_{i-1}(t_o)| > L$ por algum par $(i, i-1)$ significa que ocorreu uma colisão entre os veículos $i-1$ e i e portanto, a partir do instante t_o o modelo perde a validade para todos os que se encontrarem atrás do $(i-1)$ -ésimo.

Na prática, existe uma *densidade crítica*, $\rho_{crt} \in]0, \rho_{max}]$, tal que, a partir desta a velocidade começa a decrescer; com efeito, o pelotão pode estar a viajar à velocidade máxima, v_{max} , permitida para a via onde se encontra até ao instante em que deparar-se perante um troço de via estreito - que pode ser um túnel estreito, uma ponte estreita ou mesmo uma via com parte suprimida - sendo portanto obrigado a abrandar (gradualmente) e, conseqüentemente, aumentando a *densidade* até esta atingir o seu máximo - em ρ_{max} - o que acontece quando o pelotão encontrar-se (quase) parado, isto é, quando não haver (quase) nenhum espaço entre dois veículos consecutivos quaisquer. Conforme se pode observar, a *densidade crítica* verifica-se à entrada dos troços estreitos e portanto uma quantidade que depende das características de cada via. Assim, para cada via conhece-se o ρ_{crt} . Uma vez que v deve ser contínua, $v_{max} = v(\rho_{crt})$. Mais detalhes podem ser encontrados na secção 8.2 de Illner [2].

Agora deduzamos a velocidade em função da *densidade* para $\rho > \rho_{crt}$, pois para $\rho \leq \rho_{crt}$, temos que $v(\rho)$ é constante e igual a v_{max} . Substituindo α na equação (1.7) pelo seu valor (dado pela equação (1.8)), obtêm-se

$$v(\rho) = -\lambda \ln \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} \right) \quad \text{para } \rho \geq \rho_{crt} \quad (1.9)$$

e, tomando $\rho = \rho_{crt}$ em (1.9), tem-se

$$v_{max} = v(\rho_{crt}) = -\lambda \ln \left(\frac{\rho_{crt}}{\rho_{max}} \right) \quad \text{para } \rho \geq \rho_{crt}, \quad (1.10)$$

que permite obter explicitamente o valor de λ :

$$\lambda = \frac{v_{max}}{\ln \left(\frac{\rho_{max}}{\rho_{crt}} \right)}. \quad (1.11)$$

Finalmente, substituindo λ (dado por (1.11)) na equação (1.9) tem-se

$$v(\rho) = \begin{cases} v_{max} & \text{se } \rho \leq \rho_{crt} \\ v_{max} \ln \left(\frac{\rho_{max}}{\rho} \right) \left[\ln \left(\frac{\rho_{max}}{\rho_{crt}} \right) \right]^{-1} & \text{se } \rho > \rho_{crt}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Claramente, o decréscimo logarítmico da velocidade a partir de ρ_{crt} justifica a razoável aceitabilidade deste modelo, uma vez que, conforme constatámos anteriormente, a partir deste ponto a velocidade decresce gradualmente até se anular em ρ_{max} .

Substituindo v (dado pela equação (1.12)) na equação (1.6), obtêm-se uma nova descrição para a função *fluxo*:

$$j(\rho) = \begin{cases} \rho v_{max} & \text{se } \rho \leq \rho_{crt} \\ \rho v_{max} \ln \left(\frac{\rho_{max}}{\rho} \right) \left[\ln \left(\frac{\rho_{max}}{\rho_{crt}} \right) \right]^{-1} & \text{se } \rho > \rho_{crt}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Se derivarmos esta equação em ordem a $\rho \leq \rho_{crt}$, obtemos $j'(\rho) = v_{max} > 0$, o que significa que j é crescente em $]0, \rho_{crt}]$, atingindo, obviamente, o máximo em $\rho = \rho_{crt}$. Mas, segundo Illner [2], as observações feitas aos tráfegos rodoviários de muitas cidades sugerem que j atinge o seu máximo em $\rho > \rho_{crt}$. Portanto, derivando a mesma equação em ordem a $\rho > \rho_{crt}$, igualando a zero e resolvendo em ordem a ρ , simples manipulação algébrica permite concluir que o *fluxo* é máximo em

$$\rho_o = \rho = \frac{\rho_{max}}{e}, \quad (1.14)$$

que denominamos por *densidade ótima*. Usando isto, pode-se deduzir uma fórmula geral para a velocidade do i -ésimo veículo. De facto, tendo em conta que $\rho_o > \rho_{crt}$ e introduzindo-o na equação (1.9), tem-se

$$v(\rho_o) = -\lambda \ln \left(\frac{\rho_o}{\rho_{max}} \right) = \lambda. \quad (1.15)$$

Assim, introduzindo o valor de λ na equação (1.8), obtêm-se

$$\alpha = v(\rho_o) \ln(\rho_{max}). \quad (1.16)$$

Portando, Substituindo λ e α pelos valores dados por (1.15) e (1.16), respectivamente, na equação (1.4), uma simples manipulação algébrica permite concluir que

$$v_i(t + \tau) = v(\rho_o) \ln(\rho_{max} [X_{i-1}(t) - X_i(t)]). \quad (1.17)$$

Na próxima secção estudamos o efeito de uma perturbação à *configuração de equilíbrio* devido a desaceleração do primeiro veículo, ou seja, o veículo que lidera o pelotão.

1.2 A perturbação no deslocamento

Nesta secção, conforme já anunciamos anteriormente, o nosso objectivo é deduzir um modelo para as *perturbações nos deslocamentos* dos veículos de um pelotão que se encontra a circular na *configuração de equilíbrio*, quando o líder deste trava por um instante e, de imediato, volta a acelerar até atingir a velocidade com que se encontrava a circular.

Ora, consideremos um pelotão de N veículos a circular numa via de tráfego na *configuração de equilíbrio*, conforme se ilustra na Figura 1 (na página 3). Agora, suponhamos que ao passar no ponto $x_o = 0$ da estrada, o condutor do veículo líder (do pelotão) trava por um instante e volta a acelerar até que o veículo atinja novamente a velocidade com que se encontrava a circular na *configuração de equilíbrio*. Considera-se, no que se segue, que a contagem do tempo se inicia no instante em que a desaceleração começa.

Portanto, a velocidade do veículo líder, que designaremos por V_1 , é dado por

$$V_1(t) = \begin{cases} v & \text{se } t \leq 0 \\ v(1 - b(t)) & \text{se } t > 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

onde a constante $v = v(\rho_o)$ é a velocidade na *configuração de equilíbrio* (pois, nesta situação os veículos estão espaçados numa *densidade ótima* $\rho_o = \frac{\rho_{max}}{e}$) e $b = b(t)$ é uma função que supomos tomar valores em $[0, 1]$, nula para $t \leq 0$ e $t > t_1$ e continuamente diferenciável e não negativa para $t \in [t, t_1]$, a que chamaremos de função “desaceleração-aceleração”. Aqui, t_1 denota o tempo que decorre desde $t_o = 0$ (instante em que o líder inicia a travagem) até o veículo atingir novamente a velocidade de equilíbrio. Claramente, como se pode constatar, b modela o processo de desaceleração e aceleração.

Notando que $X_1(0) = x_o = 0$, a posição (verdadeira) do veículo líder, X_1 , pode ser deduzida como função de tempo, integrando a sua função velocidade V_1 em ordem ao tempo, conforme se segue:

$$X_1(t) = \begin{cases} vt & \text{se } t \leq 0 \\ v(t - B(t)) & \text{se } t > 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

onde $B(t) = \int_0^t b(s)ds$.

Seja $Y_1 = Y_1(t)$ a posição onde o veículo líder estaria se o condutor não tivesse travado, isto é, a posição não perturbada $Y_1(t) = vt$. Assim, a *perturbação no deslocamento* do veículo líder, que designaremos por Z_1 , é dada por $Z_1(t) = X_1(t) - Y_1(t)$, ou seja,

$$Z_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ -vB(t) & \text{se } t > 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Uma vez que o condutor do veículo líder trava, para evitar colisões, os condutores dos restantes veículos são obrigados a travar, pelo que é também do nosso interesse modelar as *perturbações nos deslocamentos* dos restantes $N - 1$ veículos. Portanto, tratemos agora do caso $2 \leq i \leq N$.

Sejam X_i e $Z_i = X_i - Y_i$, respectivamente, a posição (verdadeira) e a *perturbação no deslocamento* do i -ésimo veículo. Y_i é a posição onde o i -ésimo veículo estaria se o seu condutor não tivesse travado. Recordando que na *configuração de equilíbrio* a distância entre o pára-choques traseiro e o pára-choques frontal de dois veículos consecutivos quaisquer é d e que o comprimento destes é L (ver Figura 1, na página 3), pode-se facilmente deduzir que a distância entre o para-choques frontal do veículo líder e o para-choques traseiro do i -ésimo veículo é $(i - 1)(d + L)$. Deste modo, concluímos que

$$Y_i(t) = vt - (i - 1)(d + L)$$

e

$$Z_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ X_i(t) - vt + (i - 1)(d + L) & \text{se } t > 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Antes de deduzir a equação diferencial para a *perturbação no deslocamento (equação-diferencial-atraso)*, que é o nosso principal objectivo nesta secção, vamos transferir a restrição $|X_{i-1} - X_i| > L$ para restrição em $Z_i - Z_{i-1}$:

$$L < X_{i-1}(t_q) - X_i(t_q) = Z_{i-1}(t_q) - Z_i(t_q) + d + L \text{ sse } Z_i(t_q) - Z_{i-1}(t_q) < d.$$

A violação de tal restrição por algum par de veículos $(i, i - 1)$, $i > 1$, significa que estes colidiram-se e portanto, para $t \geq t_q$, o modelo perde a validade para todos os que circulam atrás $(i - 1)$ -ésimo. Recordando que na *configuração de equilíbrio* $d + L = \frac{1}{\rho} = \frac{e}{\rho_{\max}}$, a função (1.21) pode-se, de modo equivalente, reescrever como:

$$Z_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ X_i(t) - \left[vt - \frac{e(i-1)}{\rho_{\max}} \right] & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

e, notando que pela equação (1.17),

$$\frac{d}{dt} X_i(t + \tau) = v \ln \{ \rho_{\max} [Y_{i-1}(t) - Y_i(t) + Z_{i-1}(t) - Z_i(t)] \}, \quad (1.23)$$

tem-se a *equação-diferencial-atraso*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_i(t + \tau) &= v \ln \left\{ \rho_{\max} \left[\frac{e}{\rho_{\max}} + Z_{i-1}(t) - Z_i(t) \right] \frac{1}{e} \right\} \\ &= v \ln \left\{ 1 + \frac{\rho_{\max}}{e} [Z_{i-1}(t) - Z_i(t)] \right\} \end{aligned} \quad (1.24)$$

para $2 \leq i \leq N$, com a *condição inicial*

$$Z_i(t) = 0 \text{ se } t < 0, 1 \leq i \leq N.$$

Observação .2 *É de notar que a equação-diferencial-atraso se obteve a partir da equação (1.23), usando as igualdades $X_i(t + \tau) = Y_i(t + \tau) + Z_i(t + \tau)$, $Y_i(t) = X_i(t) - Z_i(t) = vt - \frac{e(i-1)}{\rho_{\max}}$ e $v = \ln(e)v$.*

Substituindo a variável t por $t - \tau$ na equação (1.24), obtemos

$$\frac{d}{dt} Z_i(t) = v \ln \left\{ 1 + \frac{\rho_{\max}}{e} [Z_{i-1}(t - \tau) - Z_i(t - \tau)] \right\}, \quad (1.25)$$

com a *condição inicial*

$$Z_i(t - \tau) = 0 \text{ se } t < \tau, 1 \leq i \leq N. \quad (1.26)$$

Reservamos a próxima secção para a dedução da solução da *equação-diferencial-atraso*.

1.3 O procedimento para determinar a solução

Para encontrar uma solução explícita para a *equação-diferencial-atraso* (1.25) procedemos recursivamente sobre os intervalos de tempo $[k\tau, (k + 1)\tau]$, notando que o intervalo $[0, \infty[$ pode ser escrito como $\bigcup_{k \geq 0} [k\tau, (k + 1)\tau)$.

Observação .3 *Dada a função “desaceleração-aceleração” b , a perturbação no deslocamento do veículo líder, Z_1 , é conhecida em toda parte em $[0, \infty[$.*

Vamos agora investigar Z_2 sucessivamente nos intervalos $[0, \tau)$, $[\tau, 2\tau)$, \dots , começando com $[0, \tau)$.

Ora, pela equação (1.25),

$$\frac{d}{dt}Z_2(t) = v \ln \left\{ 1 + \frac{\rho_{\max}}{e} [Z_1(t - \tau) - Z_2(t - \tau)] \right\}, \quad (1.27)$$

com a *condição inicial* $Z_2(t - \tau) = 0$ se $t < \tau$. Sendo $Z_1(t) = Z_2(t) = 0$ para $t \leq 0$, claramente $Z_1(t - \tau) = Z_2(t - \tau) = 0$ se $t \in [0, \tau)$ e portanto

$$\frac{d}{dt}Z_2(t) = 0, \quad t \in [0, \tau),$$

pelo que $Z_2(t) = 0$. Pois, o condutor do veículo $i = 2$ só inicia a travagem em τ .

Investiguemos Z_2 no intervalo $[\tau, 2\tau)$.

Uma vez que $t \in [\tau, 2\tau)$ equivale a $(t - \tau) \in [0, \tau)$, tem-se $Z_2(t - \tau) = 0$ em $[\tau, 2\tau)$ e portanto

$$\frac{d}{dt}Z_2(t) = v \ln \left\{ 1 + \frac{\rho_{\max}}{e} [Z_1(t - \tau)] \right\}, \quad t \in [\tau, 2\tau).$$

Sendo Z_1 conhecido em toda parte, calcula-se explicitamente a solução de Z_2 em $[\tau, 2\tau)$. De facto, conforme o leitor já deve ter constatado, em cada “passo” do procedimento usa-se a solução de Z_2 em $[(k - 1)\tau, k\tau)$ conjuntamente com o facto de Z_1 ser conhecido em toda parte em $[0, \infty[$ para calcular explicitamente a solução de Z_2 em $[k\tau, (k + 1)\tau)$. Mais ainda, claramente, repetindo este procedimento, calcular-se-há a solução explícita de Z_2 em $[0, \infty[$, ou seja, em toda a parte.

Agora, usando o facto de conhecer Z_2 em toda a parte em $[0, \infty[$, pode-se calcular a solução de Z_3 sucessivamente nos intervalos $[0, \tau)$, $[\tau, 2\tau)$, \dots , procedendo identicamente ao sucedido no caso Z_2 , conforme descrito no parágrafo anterior. Portanto, torna-se claro que usando o conhecimento de Z_{i-1} , $i > 1$, em toda parte no intervalo $[0, \infty[$, e Z_i no instante $t \leq 0$, se pode calcular Z_i sucessivamente nos intervalos $[0, \tau)$, $[\tau, 2\tau)$, \dots .

Portanto, conforme descrito, pode-se, teoricamente, calcular a solução explícita para Z_i , para $i = 1, \dots, i = N$. Contudo, uma vez que em cada “passo” do procedimento para encontrar a solução de Z_i , que acabamos de descrever, os cálculos integrais necessários tornam-se cada vez mais complexos, um método numérico de aproximação pode constituir uma alternativa mais prática para determinar a solução da *equação-diferencial-atraso*. Um tal método, este que introduzimos no capítulo 3, é o conhecido *método de Euler* para aproximar a solução da *equação-diferencial-atraso*.

No próximo capítulo daremos respostas a algumas questões.

2 Alguns resultados

Neste capítulo o nosso objectivo é dar respostas às seguintes questões:

- 1 Qual o tempo de reação máximo (τ) do condutor do veículo $i = 2$, para que, após o condutor do veículo líder ($i = 1$) ter iniciado uma travagem, consiga acionar o travão antes do seu veículo embater no deste?
- 2 Qual a distância mínima d^* que deve manter o veículo $i = 2$ em relação ao veículo líder, para que, sabendo que o tempo de reação do seu condutor é, diga-se, $\tau = 1$, este consiga acionar o travão antes de embater no veículo líder, após o condutor deste último ter travado?

Suponhamos que um pelotão constituído por N veículos de comprimentos iguais a $L = 6.1$ m encontra-se a circular numa *configuração de equilíbrio*. Nesta situação, conforme vimos no capítulo anterior, os veículos encontram-se espaçados numa *densidade ótima*

$$\rho_o = \frac{\rho_{max}}{e} = \frac{1}{Le} \approx 0.06,$$

isto é, aproximadamente 6 veículos por cada 100 metros, e a distância entre o para-choques traseiro e o para-choques frontal de dois veículos consecutivos quaisquer é $d \approx 10.5667$ m. Suponhamos ainda que a velocidade máxima permitida para a via onde circula é $v_{max} = 100$ km/h ≈ 27.7778 m/s. Uma vez que, conforme foi visto no capítulo anterior, as observações sugerem $\rho_o > \rho_{crt}$, tem-se

$$\begin{aligned} v(\rho_o) &= v_{max} \ln \left(\frac{\rho_{max}}{\rho_o} \right) \left[\ln \left(\frac{\rho_{max}}{\rho_{crt}} \right) \right]^{-1} \\ &\approx 27.7778 \left[\ln \left(\frac{0.06e}{0.04} \right) \right]^{-1} = 19.7641 \text{ m/s}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

considerando $\rho_{crt} = 0.04$, isto é, 4 veículos por cada 100 metros.

Suponhamos por fim que o processo “desaceleração-aceleração” do veículo líder é dado pela função (ver a Figura 2)

$$b(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ -\frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{2} & \text{se } 0 < t \leq 2 \\ 0 & \text{se } t > 2, \end{cases} \quad (2.29)$$

pelo que, pela equação (1.19), a posição do (para-choques frontal do) veículo líder, no instante genérico t , é dado por

$$X_1(t) = \begin{cases} vt & \text{se } t \leq 0 \\ v(t - B(t)) & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ v(t - B(2)) & \text{se } t > 2, \end{cases} \quad (2.30)$$

notando que $B(t^*) = B(2)$ sempre que $t^* \geq 2$ e que a função X_1 deve ser contínua.

Atendendo a que $B(t) = -\frac{(t-1)^3}{6} + \frac{t}{2} - \frac{1}{6}$, o sistema de equações (2.30) reescreve-se como

$$X_1(t) = \begin{cases} vt & \text{se } t \leq 0 \\ v \left(\frac{(t-1)^3}{6} + \frac{t}{2} + \frac{1}{6} \right) & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ v \left(t - \frac{2}{3} \right) & \text{se } t > 2 \end{cases} \quad (2.31)$$

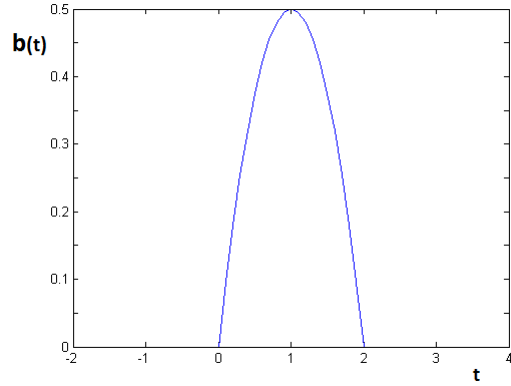


Figura 2: Representação gráfica da função “desaceleração-aceleração” b .

e portanto, sendo $v \approx 19.764$ m/s, uma sua aproximação será (ver a Figura 3)

$$\hat{X}_1(t) = \begin{cases} 19.7641t & \text{se } t \leq 0 \\ 19.7641 \left(\frac{(t-1)^3}{6} + \frac{t}{2} + \frac{1}{6} \right) & \text{se } 0 < t \leq 2 \\ 19.7641 \left(t - \frac{2}{3} \right) & \text{se } t > 2. \end{cases} \quad (2.32)$$

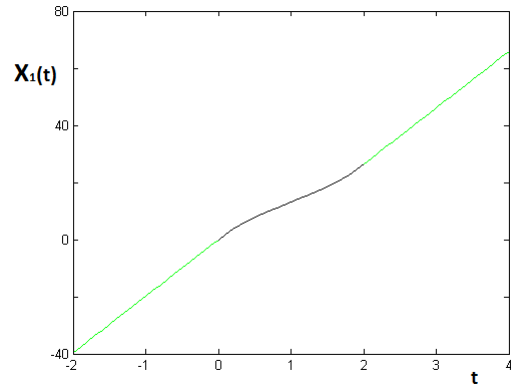


Figura 3: Representação gráfica da posição (“verdadeira”) do para-choques frontal do líder do pelotão em função do tempo. A **verde** ilustra-se a posição antes de travar e após regressar à velocidade a que vinha circulando, antes de travar, enquanto que a **preto** ilustra-se a posição durante o período da *desaceleração-aceleração*.

Responder à questão 1 equivale a calcular o instante máximo $t = \tau$ que verifica a inequação:

$$Y_2(t) < X_1(t) - L, \quad (2.33)$$

onde X_1 é a posição do veículo líder e Y_2 é a posição onde estaria o veículo $i = 2$ se o líder não tivesse travado.

Notemos que na *configuração de equilíbrio* $Y_2(t) = vt - (d + L) \approx 19,7641t - 16.6667$, conforme se ilustra a **preto** na Figura 4. Mais ainda, tal figura “sugere” que a aproximação para o tempo de reação que andamos à procura é superior a 1 s, mas inferior a 2 s.

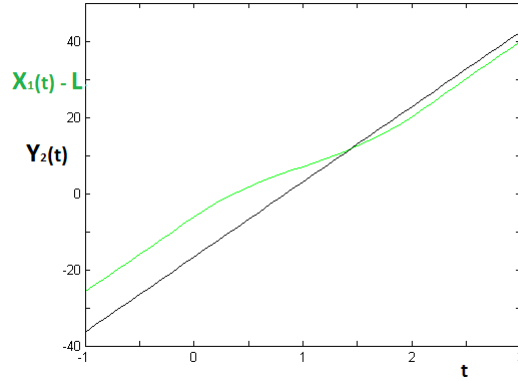


Figura 4: A **verde** e a **preto** encontram-se, respectivamente, as representações gráficas da posição (“verdadeira”) do para-choques traseiro do veículo líder e da posição onde estaria o para-choques frontal do veículo $i = 2$ se o líder não tivesse travado, em função do tempo.

Com efeito, após simples cálculos, conclui-se que a solução da inequação (2.33) determina-se resolvendo o sistema de inequações

$$\begin{cases} -d < 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t^2(3 - t) < \frac{6d}{v} & \text{se } 0 < t \leq 2 \\ v - \frac{3d}{2} < 0 & \text{se } t > 2, \end{cases} \quad (2.34)$$

que corresponde aproximadamente a resolver o sistema

$$\begin{cases} -12.68 < 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t^2(3 - t) < 3.2078 & \text{se } 0 < t \leq 2 \\ 0.7441 < 0 & \text{se } t > 2, \end{cases} \quad (2.35)$$

onde $v \approx 19,7641$ m/s, $d = 10,5667$ m e $L = 6,1$ m.

Segundo a terceira inequação ($0,7441 < 0$, se $t > 2$), sendo esta impossível, para conseguir acionar o travão antes de embater no veículo líder, o condutor do veículo $i = 2$ terá que ter um tempo de reação, τ , estritamente inferior a 2 s, o que vêm confirmar a “sugestão” da Figura 4. Recorrendo a um software (Matlab, neste caso) conclui-se que uma aproximação $\hat{\tau}$ para τ é $\hat{\tau} = 1.4289$ s, o que significa que o condutor do veículo $i = 2$ terá de ter um tempo de reação inferior a 1.4289 s para conseguir acionar o travão antes do seu veículo embater no veículo líder. Isto vêm uma vez mais reforçar a “sugestão” da Figura 4.

Para responder à questão 2, suponhamos que o pelotão circula à velocidade $v \approx 19,7641$ m/s e que o tempo de reação do condutor do veículo $i = 2$ é $\tau = 1$ s (um segundo²). O nosso objectivo agora é determinar a distância mínima, d^* , em relação ao líder, a que este deve circular, para que, sendo o seu tempo de reação 1 s, consiga travar antes de colidir, após o líder ter travado.

Ora, uma vez que as funções Y_2 e X_1 são estritamente crescentes, basta determinar d^* tal que:

$$Y_2(\tau) < X_1(\tau) - L \iff \tau^2(3 - \tau) < \frac{6d^*}{v}. \quad (2.36)$$

Sendo $\tau = 1$ s, a solução da inequação anterior é $d^* > v \times \frac{1}{3}$, pelo que uma solução aproximada para (2.36) será o intervalo]6.588, ...[. Concluímos assim que, com um $\tau = 1$ s, o condutor em causa deve manter uma distância superior a 6.588 m do veículo líder, para que, caso o condutor deste desacelere (segundo a função b), consiga acionar o travão antes de embater nele.

Nota .3 *Os resultados que solucionam as questões 1 e 2 garantem unicamente que, após o líder desacelerar, o condutor do veículo que circula imediatamente a seguir consegue acionar o travão antes de embater, mas não garantem que, após acioná-lo, consiga desacelerar o suficiente para evitar o embate. De facto, nesta situação, uma possível colisão depende de muitas outras variáveis; destacando-se a característica do seu veículo.*

3 Uma aproximação para a equação-diferencial-atraso

Conforme “sublinhado” no final da secção 1.3, o aumento da complexidade dos cálculos em cada iteração (passo) do procedimento para determinar a solução da *equação-diferencial-atraso* (1.25), descrito nesta mesma secção, pode-nos facilmente convencer a usar um método numérico alternativo a este procedimento. Para tal, neste capítulo, usando o *método de Euler*, vamos deduzir uma equação algébrica aproximada, equação esta resolúvel recursivamente.

A definição de derivada permite-nos escrever

$$\frac{d}{dt}Z_i(t) \approx \frac{Z_i(t+h) - Z_i(t)}{h}, \quad (3.37)$$

onde $0 < h \ll 1$, isto é, h é uma quantidade relativamente pequena.

Consideremos $h = \frac{1}{k}$ uma unidade de tempo, com k um natural suficientemente grande. Assim, o tempo de reação é um múltiplo de h , isto é, $\tau = \frac{M}{k}$, com $M \in \mathbb{N}$, e o instante genérico t , que é contado em unidades de h , é dado por $t = \frac{n}{k}$, com $n \in \mathbb{N}$.

²1 segundo é o tempo médio de reação dos condutores, segundo o Código de Estrada português.

De acordo com a nossa aproximação, a *perturbação no deslocamento* do i -ésimo veículo, após n unidades de tempo, define-se por

$$Z_i^*(n) := Z_i(t) = Z_i\left(\frac{n}{k}\right), \quad (3.38)$$

pelo que, obviamente, após $n + 1$ unidades de tempo, tem-se

$$Z_i^*(n + 1) = Z_i(t + h) = Z_i\left(\frac{n}{k} + h\right). \quad (3.39)$$

Pela equação (3.37), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z_i(t) &\approx \frac{Z_i(t + h) - Z_i(t)}{h} = \frac{Z_i\left(\frac{n}{k} + h\right) - Z_i\left(\frac{n}{k}\right)}{\frac{1}{k}} \\ &= k[Z_i^*(n + 1) - Z_i^*(n)]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Atendendo à definição de Z_i^* , tem-se

$$Z_i^*(n - M) = Z_i(t - \tau) = Z_i\left(\frac{1}{k}(n - M)\right).$$

Portanto, usando a definição de Z_i^* e a equação (3.40), a *equação-diferencial-atraso* reescreve-se (aproximadamente) da seguinte forma:

$$Z_i^*(n + 1) = Z_i^*(n) + \frac{v}{k} \ln \left\{ 1 + \frac{\rho_{max}}{e} [Z_{i-1}^*(n - M) - Z_i^*(n - M)] \right\}, \quad (3.41)$$

para $i = 2, 3, \dots, N$, com a *condição inicial*

$$Z_i^*(n - M) = 0 \text{ se } n < M, \quad 1 \leq i \leq N.$$

A aproximação para a *perturbação no deslocamento* do líder, $Z_1^*(n) = Z_1(t) = Z_1\left(\frac{n}{k}\right)$, é dado pela equação (1.20).

A título de exemplo de aplicação deste método, procuremos a caracterização para Z_2 nos intervalos $[0, \tau[$ e $[\tau, 2\tau[$. Consideremos um pelotão a circular nas condições introduzidas na Secção 2. Consideremos ainda $\tau = 1$ s e $h = \frac{1}{10}$ s, isto é, cada unidade de tempo igual a $\frac{1}{10}$ de segundo, o que significa que $M = 10$.

Assim, para $i = 2$, a *equação-diferencial-atraso* escreve-se como

$$Z_2^*(n + 1) = Z_2^*(n) + \frac{v}{10} \ln \left\{ 1 + \frac{\rho_{max}}{e} [Z_1^*(n - 10) - Z_2^*(n - 10)] \right\}, \quad (3.42)$$

com a *condição inicial* $Z_1^*(n - 10) = 0$ se $n < 10$.

Ora, substituindo a função B na equação (1.20), tem-se

$$Z_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{v}{6}t^2(t - 3) & \text{se } 0 < t \leq 2 \\ -\frac{2}{3}v & \text{se } t > 2, \end{cases} \quad (3.43)$$

conforme se ilustra na Figura 5, assumindo $v \approx 19,7641$ m/s. Atendendo a que

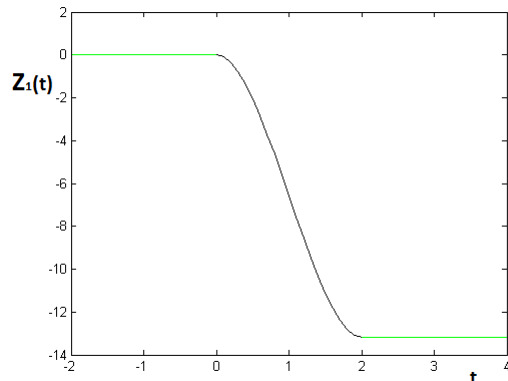


Figura 5: Representação gráfica da *perturbação no deslocamento* do veículo líder. A **verde** ilustra-se a perturbação antes de travar e após ter regressado novamente à situação de equilíbrio, enquanto que a **preto** ilustra-se a perturbação durante o período de “desaceleração-aceleração”

o condutor do veículo $i = 2$ só inicia a travagem no instante $\tau = 1$ s, conclui-se que

$$Z_2(t) = 0 \text{ se } t \in [0, \tau[= [0, 1[$$

ou, de acordo com a nossa aproximação, que

$$Z_2^*(n) = Z_2\left(\frac{n}{10}\right) = 0 \text{ se } n \in [0, 10[. \quad (3.44)$$

Assim, como $n \in [0, 10[\Leftrightarrow (n - 10) \in [-10, 0[$, conclui-se também que $Z_1^*(n - 10) = Z_2^*(n - 10) = 0$, pelo que a equação (3.42) produz

$$Z_2^*(10) = Z_2^*(9) = 0 \text{ se } n \in [0, 10[.$$

Investiguemos agora Z_2 no intervalo $[\tau, 2\tau[= [1, 2[$.

Portanto, concluímos que

$$Z_2^*(n + 1) = Z_2^*(n) + \frac{v}{10} \ln \left\{ 1 + \frac{\rho_{max}}{e} \left[\frac{v}{6} \left(\frac{n}{10} - 1 \right)^2 \left(\frac{n}{10} - 4 \right) \right] \right\}, \quad (3.45)$$

com $n \in [10, 20[$.

A Figura 6 ilustra uma aproximação para a *perturbação no deslocamento*, Z_2^* , do veículo $i = 2$ no intervalo de tempo $[1, 2[$, onde pode-se observar que esta tende a decrescer exponencialmente. De facto, uma vez que o líder trava sem nenhum aviso prévio, é natural que o condutor do veículo $i = 2$ efectue uma travagem brusca e, portanto, daí o módulo da *perturbação no deslocamento* do seu veículo cresça exponencialmente até ao instante em que volta a acelerar.

4 Nota conclusiva

Conforme podemos constatar, apesar de assumir algumas hipóteses que, de certa forma, divergem do que na prática se verifica no tráfego rodoviário, a *equação-*

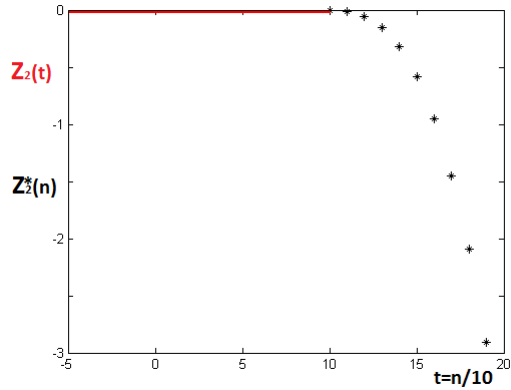


Figura 6: Representação gráfica da *perturbação no deslocamento* do veículo $i = 2$, para o instante $t < 2$ s. A **vermelho** ilustra-se a perturbação antes de travar e a **preto** a aproximação para a perturbação em $t = \frac{n}{10} \in [1, 2]$.

diferencial-atraso que aqui introduzimos permite obter uma razoável caracterização das *perturbações nos deslocamentos* dos veículos que figuram num pelotão, quando o líder deste desacelera; sobretudo quando este estiver a circular numa via, em que a monotomia da condução, imposta pela ausência de curvas que obrigam os condutores a alterarem consideravelmente as velocidades e as trajetórias dos seus respectivos veículos e pela existência de pavimentos em ótimos estados de conservação em toda a sua extensão, “obriga” o pelotão a (praticamente) manter a *configuração de equilíbrio*. Sendo a *configuração de equilíbrio* uma das fundamentais hipóteses sobre as quais se introduziu a equação em questão, podemos afirmar que em vias que eventualmente incitam a monotomia de condução - nomeadamente, nas reservadas a automóveis e motociclos e nas autoestradas - esta constitui um ótimo e imprescindível modelo para caracterizar as *perturbações nos deslocamentos* dos veículos.

Mais ainda, podemos dizer que a flexibilidade da *equação-diferencial-atraso* em permitir um número N qualquer de veículos a figurarem num pelotão, permitindo portanto o cálculo da *perturbação no deslocamento* de qualquer um destes, em qualquer instante t , bem como a sua eficiência em detetar colisões, conferem-lhe um notável lugar no seio da “modelação matemática”.

Um projeto ambicioso, sobre o qual poderemos mais tarde debruçar-nos, poderá ser o de deduzir uma *equação-diferencial-atraso* para a *perturbação no deslocamento* que prescindia da *configuração de equilíbrio* e incluía, pelo menos, a variação dos tempos de reação dos condutores, isto é, em vez de considerar o mesmo tempo τ para todos os N condutores, considerar, para o condutor do veículo i , $i = 1, \dots, N$, um tempo de reação τ_i .

A Uma consequência do procedimento para a solução

O procedimento para calcular a solução da *equação-diferencial-atraso* que descrevemos na seção 1.3 pode ser usado para demonstrar um dos mais famosos resultados de existência para o *problema de valor inicial para equação diferencial ordinária* (pioneiramente provado pelo matemático G. Peano). Aqui, vamos provar uma versão mais fraca do referido resultado. Para a demonstração de um resultado geral e uma breve discussão, recomendamos Dow [1].

Antes de anunciar tal resultado, estabelecemos uma lista de “ferramentas” que usaremos para a demonstração:

- A *equicontinuidade* de um conjunto de funções contínuas;
- O (bem conhecido) teorema de *Arzelà-Ascoli*;
- O procedimento para calcular a solução da *equação-diferencial-atraso*.

Definição .2 *Seja $S = \{f : f \text{ uma função contínua definida em } [a, b]\}$. Diz-se que o conjunto S é equicontínuo, se $\forall \epsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta > 0$, tal que*

$$\forall f \in S, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall y \in [a, b].$$

A noção de *equicontinuidade* é mais forte que a noção de continuidade, uma vez que, entre outras razões, enquanto este último requer um δ para cada $f \in S$, na *equicontinuidade* δ não depende de $f \in S$.

Teorema .1 (Arzelà-Ascoli) *Seja $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções equicontínuas em $[a, b]$. Então $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contém (admite) uma subsequência que converge uniformemente para uma função limite g contínua em $[a, b]$.*

A demonstração deste teorema envolve técnicas fora do alcance deste trabalho, pelo que assumimo-lo válido, omitindo a prova.

Anunciamos agora o *teorema de existência de Peano*.

Teorema .2 *Seja f uma função contínua e limitada em $(x, y) \in [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}$, com $a > 0$. Então existe pelo menos uma função y definida em $x \in [x_0, x_0 + a]$ tal que*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1.46)$$

Em particular, tal y é continuamente diferenciável no seu domínio.

Demonstração A.2 Sendo o *problema de valor inicial* (1.46) equivalente à equação

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad (1.47)$$

provaremos de forma equivalente a solubilidade desta última.

Seja $\alpha > 0$ um parâmetro. Consideremos a função aproximação y_α definido por

$$y_\alpha(x) = \begin{cases} x_0 & \text{se } x \leq x_0 \\ x_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_\alpha(t)) dt & \text{se } x_0 \leq x < x_0 + a. \end{cases} \quad (1.48)$$

Vamos agora estudar y_α sucessivamente nos intervalos $[x_0 + (j-1)\alpha, x_0 + j\alpha]$, $j = 1, \dots, N$, e $[x_0 + N\alpha, x_0 + a]$, onde $N = \lfloor \frac{a}{\alpha} \rfloor$. Efectuando o mesmo procedimento usado para calcular a solução da *equação-diferencial-atraso*, conclui-se inequivocamente que todas as funções y_α , $\alpha > 0$, são unicamente definidos sobre o intervalo $[x_0, x_0 + a]$. Além disso, $\{y_\alpha\}_{\alpha > 0}$ forma uma família *equicontinua* de funções limitadas. De facto, sendo f limitada, tem-se

$$|y_\alpha(x)| \leq aC \quad \text{e} \quad |y'_\alpha(x)| \leq C,$$

com C uma constante.

Para a *equicontinuidade*, seja $x \in [x_0, x_0 + a]$, $s \in [s_0, s_0 + a]$, arbitrário, $d_1 = \min\{x_0, s_0\}$ e $d_2 = \max\{x_0, s_0\}$. Notemos que $x, s \in [d_1, d_2 + a]$. Assim,

$$|y_\alpha(x) - y_\alpha(s)| \leq (a + d_2 - d_1)(2C + 1)$$

e consequentemente a *equicontinuidade*.

Seja agora $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência que converge para 0. Consideremos uma seqüência y_{α_n} , que é uma família *equicontinua* de funções, uma vez que y_α é. Pelo teorema de *Arzelà-Ascoli*, $\{y_{\alpha_n}\}$ contém uma subseqüência (que preferimos também denotar por y_{α_n}), que converge uniformemente para, diga-se, y ; de forma curta, $y_{\alpha_n} \xrightarrow{u.} y$.

Provemos que $y_{\alpha_n}(t - \alpha_n)$ é ainda convergente para $y(t)$. De facto,

$$\begin{aligned} |y_{\alpha_n}(t - \alpha_n) - y(t)| &\leq |y_{\alpha_n}(t - \alpha_n) - y_{\alpha_n}(t)| + |y_{\alpha_n}(t) - y(t)| \\ &\leq C\alpha_n + |y_{\alpha_n}(t) - y(t)| \end{aligned} \quad (1.49)$$

e, portanto, sendo $y_{\alpha_n} \xrightarrow{u.} y$, obtêm-se a convergência uniforme.

Finalmente, usando a continuidade uniforme de f em $[x_0, x_0 + a]$ e tomando $\lim_{n \rightarrow \infty}$ de y_{α_n} dado por (1.48), tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_{\alpha_n}(x) &= x_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_{\alpha_n}(t - \alpha_n)) dt \\ &= x_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = y(x), \end{aligned} \quad (1.50)$$

completando assim a prova.

Referências

- [1] M. A. DOW and R. VYBORNY. Elementary proofs of peano's existence theorem. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 15:366–372, 1973.

- [2] R. Illner, C. S. Bohun, S. McCollum, and T. V. Roode. *Mathematical modelling - A case studies approach*. American mathematical society, 2005.
- [3] F. Scheck. *Mechanics: from Newton's laws to deterministic chaos*. 1999.